

回路方程式の定式化および回路解析のための諸定理

1 はじめに

回路方程式の立て方すなわち定式化法に関して、すでに節点解析法や閉路解析法等について学んでいる。本章では、定式化法に関して、それらの一般的な方法を導出する。またそれら定式化法を基に、回路解析を行う際に有用な諸定理を導出する。

2 キルヒホッフの法則の行列による表現

キルヒホッフの電流則 (KCL) や電圧則 (KVL) は、回路の素子の接続情報、すなわち各素子をどの節点よりどの節点に接続されているかに基づく性質である。そのため回路が与えられた場合、接続情報に基づいてそれら平衡関係を示す行列表現を導出する。

図 1(a) に示すブリッジ形の回路について考える。図中の丸印は節点番号である。節点数は 4 であるため、節点 4 をグラウンドに選ぶとこれ以外の節点数は 3 となる。各素子にふられた電流の向きに基づいて、各素子を接続情報のみを抽出した枝に置き換えると、図 1(b) に示す有向グラフとなる。各素子に対応した 6 本の枝を 1 - 6 の番号で区別している。

すると節点 1-3 での KCL は各素子間の電流の平衡関係を表現し

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_4 - I_6 &= 0 \\ I_2 - I_4 + I_5 &= 0 \\ -I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。これを行列形式では、 T を転置記号として

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \end{matrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{I} = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4 \ I_5 \ I_6]^T \quad (3)$$

とすれば、以下で表される。

$$\mathbf{AI} = \mathbf{0} \quad (4)$$

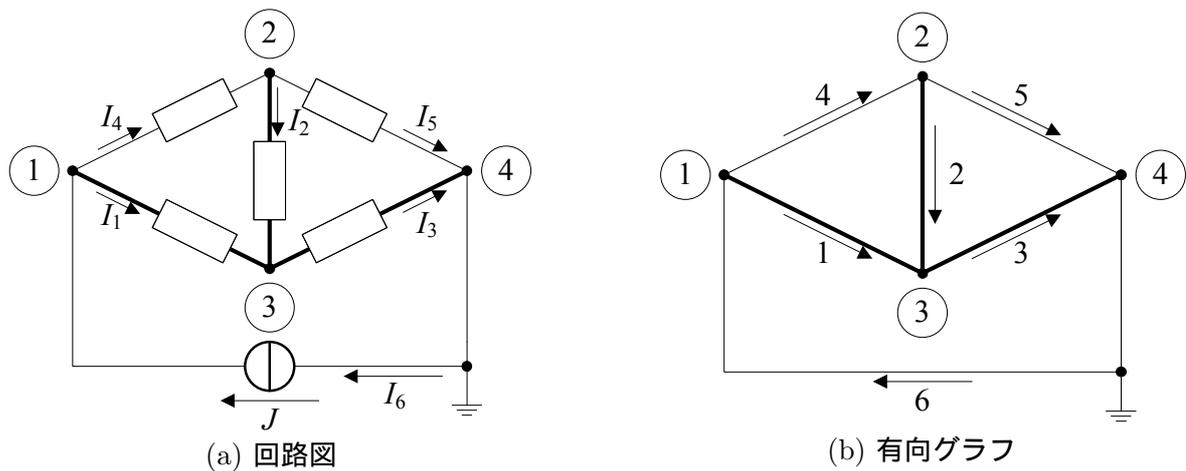


図 1: ブリッジ回路

すなわち A は、各素子の単純な接続情報に基づいて流出節点を $+1$ 、流入節点を -1 、他を 0 なる要素で表現して、構成される。そのためこの行列 A は接続行列と呼ばれる。

電流の平衡関係は節点においてのみならず、それを拡張して、回路を 2 分割した部分回路間に対しても成立する。

その関係を導出するために、枝を 2 種類の集合に分ける。すべての節点を連結しループを作らない枝の集合を木と呼ぶ。この選び方は一意的ではないが、この場合例えば順に 1-3 を木の枝に選ぶことができる。木に含まれない枝の集合を補木と呼ぶ。各木の枝に対して、この枝 1 本と補木の枝との組み合わせにより回路部分を 2 つに分割することができる。これら枝の組み合わせはカットセットと呼ばれ、2 つの分割回路間を橋渡しするこれら枝電流間に電流の平衡関係が成立する。木の枝 1-3 に対して以下の関係となる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_4 - I_6 &= 0 \\ I_2 - I_4 + I_5 &= 0 \\ I_3 + I_5 - I_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

この関係は

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

とすれば、以下で表される。

$$DI = 0 \quad (7)$$

行列 D はカットセット行列と呼ばれ、その選び方のゆえに、木の枝の要素部分は単位行列となる。

KVL は、補木の枝それぞれに対して、木の枝との作るループに対して構成される。例えば、補木の枝 4 に対して、これは木の枝 1, 2 とループを作る。補木の枝 5, 6 は、それぞれ木の枝 2, 3 および 1, 3 とループを作る。従って KVL は以下となる。

$$\left. \begin{aligned} -V_1 + V_2 + V_4 &= 0 \\ -V_2 - V_3 + V_5 &= 0 \\ V_1 + V_3 + V_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

以上を行列表現すると向きを考慮して

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_5 \ V_6]^T \quad (10)$$

とすれば、以下で表される。

$$BV = 0 \quad (11)$$

行列 B は閉路行列と呼ばれ、その選び方のゆえに、補木の枝の要素部分は単位行列となる。カットセット行列と閉路行列間には以下の関係がある。

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & D_L \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} -D_L^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

すなわち

$$BD^T = 0 \quad (14)$$

3 回路方程式の定式化法

3.1 節点方程式

抵抗と電流源のみからなる回路の節点方程式は、一般的に以下のように定式化される。電圧源を含んでいる場合には、後で述べるノートンの定理より、直列接続の抵抗成分をも含めて、電流源と並列接続の抵抗との等価回路に変換する必要がある。

1. 回路の節点数を n とするとき、グラウンド以外の $(n - 1)$ 個の節点に順に番号をつける。
2. それぞれの節点に対して KCL をたてる。この際、節点よりの流出電流の向きを左辺で正にとるとする。

	V_{ni}	V_{nj}
節点 i	G	$-G$
節点 j	$-G$	G

(a) コンダクタンス

	RHS
節点 i	$-J$
節点 j	J

(b) 電流源

図 2: スタンプの例

例えば図 1 の回路の節点電圧 V_{n1}, \dots, V_{n3} による節点方程式は以下となる。

$$\begin{aligned} I_1 + I_4 - I_6 &= 0 \\ I_2 - I_4 + I_5 &= 0 \\ -I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1 V_1 \\ I_2 &= G_2 V_2 \\ I_3 &= G_3 V_3 \\ I_4 &= G_4 V_4 \\ I_5 &= G_5 V_5 \\ I_6 &= J \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 & -G_4 & -G_1 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_2 \\ -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

節点よりの流出電流の向きを左辺で正にとっているので、コンダクタンス行列の対角成分は正となり、非対角成分は負となる。またコンダクタンス行列は対称となる。

各素子の回路方程式への寄与には、図 2 に示すスタンプと呼ばれるパターンにより一般化される。図 2(a) は節点 i より節点 j に接続されたコンダクタンス G のスタンプで、それぞれ節点 i における流出電流 $G(V_{ni} - V_{nj})$ および節点 j における流入電流 $-G(V_{ni} - V_{nj})$ を表す。図 2(b) は節点 i より節点 j に接続された電流源 J のスタンプで、右辺 (RHS) ベクトルでは流入電流が正となるので、それぞれ節点 i における流出電流 $-J$ および節点 j における流入電流 J を表す。

3.2 カットセット方程式

抵抗と電流源のみからなる回路のカットセット方程式は、一般的に以下のように定式化される。

1. グラウンド以外の節点に順に番号をつける。
2. $(n - 1)$ 本の木の枝を選ぶ。
3. 木の枝に対応して、それぞれのカットセット方程式をたてる。この際、木の枝の電流の向きを左辺で正にとるとする。

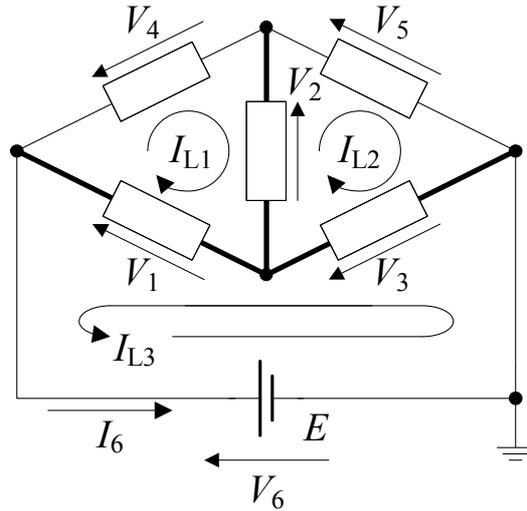


図 3: ブリッジ回路の閉路方程式

例えば図 3 のカットセット方程式は以下となる。

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_4 - I_6 &= 0 \\
 I_2 - I_4 + I_5 &= 0 \\
 I_3 + I_5 - I_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 & -G_4 & -G_1 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_2 \\ 0 & G_5 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{bmatrix} \tag{19}$$

木の枝の電流の向きを左辺で正にとっているので、コンダクタンス行列の対角成分は正となる。

3.3 閉路方程式のたて方

抵抗と電圧源のみからなる回路の閉路方程式は、一般的に以下のように定式化される。電流源を含んでいる場合には、後で述べるテブナンの定理より、並列接続の抵抗成分をも含めて、電圧源と直列接続の抵抗との等価回路に変換する必要がある。枝の総数を b とする。

1. $(n - 1)$ 本の木の枝を選ぶ。
2. それ以外の $(b - n + 1)$ 本の補木の枝に対して、各補木の枝と木の枝とにより構成される閉路に対して方程式をたてる。この際、補木の枝の電流の向きを左辺で正にとるとする。

例えば図 3 の回路の補木の枝 4 - 6 に対する閉路方程式は以下となる。

$$\left. \begin{aligned}
 -V_1 + V_2 + V_4 &= 0 \\
 -V_2 - V_3 + V_5 &= 0 \\
 -V_1 - V_3 + E &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= R_1(I_{L1} + I_{L3}) \\ V_2 &= R_2(I_{L1} - I_2) \\ V_3 &= R_3(-I_{L2} - I_{L3}) \\ V_4 &= R_4I_{L4} \\ V_5 &= R_5I_{L2} \\ V_6 &= E \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

であるので、閉路方程式は以下となる。

$$\left. \begin{aligned} R_1(I_{L1} + I_{L3}) + R_2(I_{L1} - I_2) + R_4I_{L1} &= 0 \\ -R_2(I_{L1} - I_2) - R_3(-I_{L2} - I_{L3}) + R_5I_{L2} &= 0 \\ R_1(I_{L1} + I_{L3}) - R_3(-I_{L2} - I_{L3}) + E &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 & R_3 \\ R_1 & R_3 & R_1 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E \end{bmatrix} \quad (23)$$

抵抗行列は対称となり、対角成分は正となる。

3.4 タブロー法

節点方程式では、電圧源を直接的に組み入れて定式化を行うことができない。相対的に閉路方程式では、電流源を直接的に組み入れることができない。電圧源や電流源を含めて一般的に回路方程式を定式化するためには、次に示す $(n-1)$ 個の KCL、 b 個の KVL や b 個の素子の特性をすべて連立するタブロー法が有用である。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{AI} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{A}^T \mathbf{V}_n \\ \mathbf{MV} + \mathbf{NI} &= \mathbf{u}_s \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

最後の式において M, N は定数であり、 \mathbf{u}_s は、電圧源や電流源の値である。これを行列表現すれば下式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} \quad (25)$$

もしくは

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (26)$$

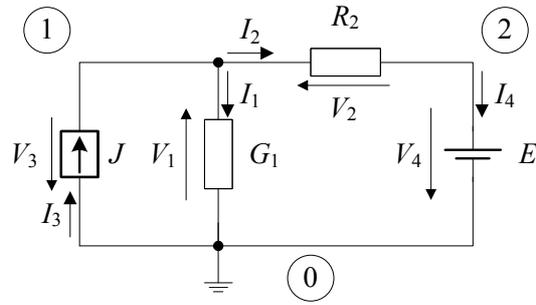


図 4: タブロー法による定式化の回路例

タブロー法による定式化の例として図 4 の回路を考える。グラウンド以外の節点数は $n - 1 = 2$ で素子数 $b = 4$ である。

接続行列は

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

となり、素子方程式は

$$\left. \begin{aligned} I_1 - G_1 V_1 &= 0 \\ V_2 - R_2 I_2 &= 0 \\ I_3 &= J \\ V_4 &= E \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

となるので、2 個の KCL、4 個の KVL や 4 個の素子方程式を連立すれば以下となる。

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J \\ E \end{bmatrix} \quad (29)$$

4 回路解析の諸定理

4.1 重ねの理

本節では回路解析の諸定理について述べ、それらの証明を行う。

線形回路において、複数の電圧源・電流源により励起された回路の電圧電流分布は、それぞれの電源により励起された分布を重ね合わせたものとなる。これを重ねの理と呼ぶ。

証明

電圧源・電流源の総数を m とする。タブロー法による回路方程式において、右辺のベクトルを m 個の各電源による励起毎に分割して表現する。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{x} &= \mathbf{u} \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (30)$$

このとき電圧電流は以下であらわされる。

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}_k) \quad (31)$$

すなわち各電源による励起 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}_k$ の和すなわち重ね合わせとなる。

4.2 補償定理

対象回路の回路方程式を以下とする。

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (32)$$

この電圧電流 \mathbf{x} において、回路パラメータを変化させ \mathbf{T} が $\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}$ となった場合には、電源を調整して $\Delta\mathbf{T}\mathbf{x}$ で補償すれば電圧電流分布は変化しない。

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\mathbf{x} &= \mathbf{u} + \Delta\mathbf{T}\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{T}\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (33)$$

そのため、パラメータ変化前の元の電圧電流 \mathbf{x} が既知であって、変化後の電圧電流 $\hat{\mathbf{x}}$ は、以下で求められる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} + \Delta\mathbf{T}\mathbf{x} - \Delta\mathbf{T}\mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{T}\mathbf{x}) - (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})^{-1}\Delta\mathbf{T}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} - (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})^{-1}\Delta\mathbf{T}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (34)$$

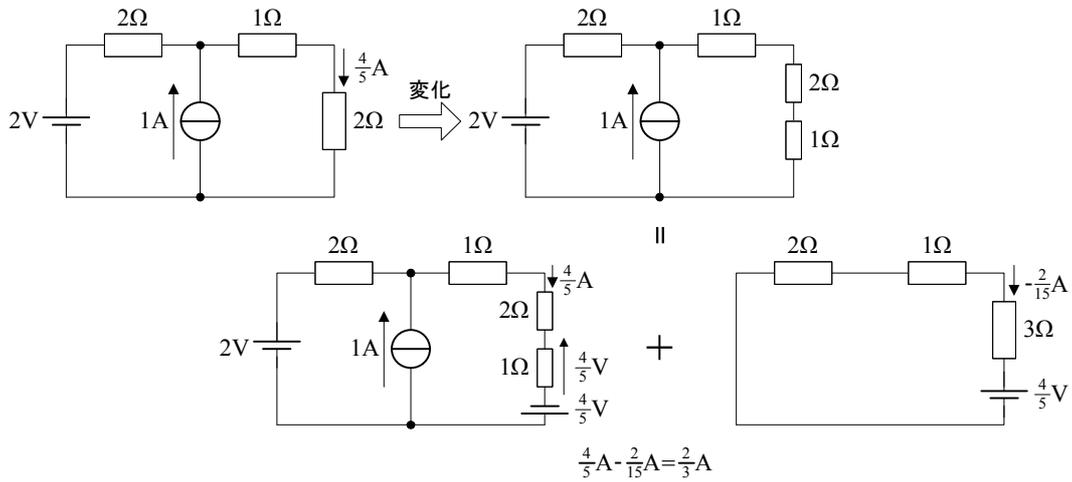


図 5: 補償定理の適用例

すなわち元の電圧電流 x と補償電源のみによる電圧電流 $(T + \Delta T)^{-1}(-\Delta T x)$ の重ね合わせにより与えられる。

これは補償定理と呼ばれる。

補償定理の適用例を図 5 の回路により説明する。この回路は電圧源と電流源により駆動され、右端の 2Ω の抵抗を流れる電流は $\frac{4}{5}\text{A}$ である。この抵抗を 3Ω に変化させた場合の電流値を求める。パラメータ変化による抵抗の電圧変化分は $\frac{4}{5}\text{V}$ であるから、これを補償する電圧源とそれを打ち消す電圧源を挿入する。それらを図のような 2 つの回路に分けて解く。左の回路は変化前の回路と等価であるため、右端の抵抗を流れる電流は $\frac{4}{5}\text{A}$ である。右の回路を流れる電流は $-\frac{2}{15}\text{A}$ である。そのためこれらを重ね合わせるとパラメータ変化後の右端の抵抗を流れる電流は $\frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3}\text{A}$ である。

4.3 テブナンおよびノートンの定理

図 6 左に示す 1 端子対回路に抵抗 R を接続した際に、端子に発生する電圧と流れる電流 I について考える。1 端子対回路は α 個の電圧源、 β 個の電流源および抵抗により構成されているとする。

する端子電圧 V は各電圧源 E_k の励起による発生電圧 $F_k E_k$ と各電流源 J_k の励起による発生電圧 $R_k J_k$ とそれらの励起がない場合の駆動電流 I による発生電圧 $R_0 I$ の重ね合わせとなる。ただし F_k, R_k, R_0 はそれぞれの単位励起による発生電圧である。

$$\begin{aligned}
 V &= R_0 I + \left(\sum_{k=1}^{\alpha} F_k E_k + \sum_{k=1}^{\beta} R_k J_k \right) \\
 &= R_0 I + E_0
 \end{aligned} \tag{35}$$

第 2 項以下は定数となるので、それらをまとめて E_0 とおける。するとこれは図 6 中央に示す回路と等価となる。すなわち電圧源、電流源および抵抗により構成される 1 端子対回路は電圧源とそれに直列に接続された抵抗との等価回路に表現できる。これがテブナンの定理であり、構成された回路はテブナンの等価回路と呼ばれる。

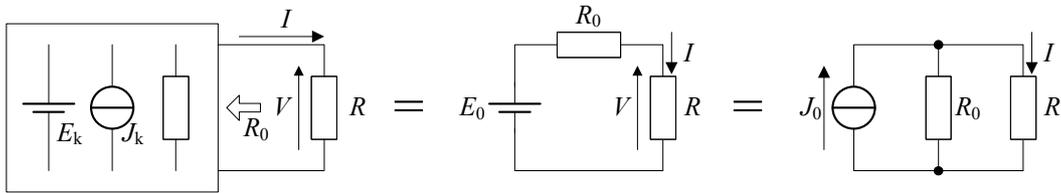


図 6: テブナンおよびノートンの等価回路

図 6 左に示す 1 端子対回路に抵抗 R を接続した際に、流れる電流 I は、各電圧源 E_k の励起による電流 $G_k E_k$ と各電流源 J_k の励起による電流 $H_k J_k$ とそれらの励起がない場合の端子電圧 V による電流 $\frac{V}{R_0}$ の重ね合わせとなる。ただし $G_k, H_k, \frac{1}{R_0}$ はそれぞれの単位励起による発生電圧である。

$$I = \frac{V}{R_0} + \left(\sum_{k=1}^{\alpha} G_k E_k + \sum_{k=1}^{\beta} H_k J_k \right) \quad (36)$$

第 2 項以下は定数となるので、それらをまとめて J_0 とおける。するとこれは図 6 右に示す回路と等価となる。すなわち電圧源、電流源および抵抗により構成される 1 端子対回路は電流源とそれに並列に接続された抵抗との等価回路に表現できる。これがノートンの定理であり、構成された回路はノートンの等価回路と呼ばれる。

テブナンおよびノートンの等価回路において、両者は等価であるため、抵抗 R_0 の値は共通であり、

$$J_0 = \frac{E_0}{R_0} \quad (37)$$

である。

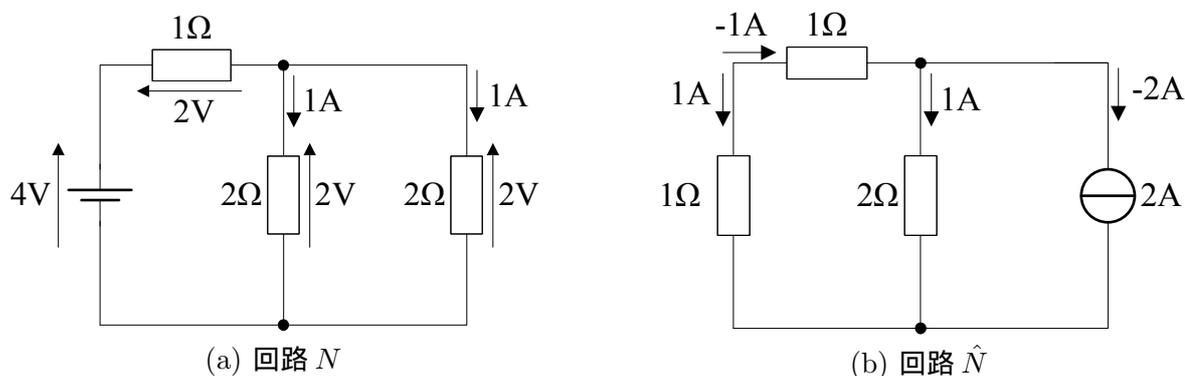


図 7: テレゲンの定理

4.4 テレゲンの定理

回路 N において、素子の電圧電流ベクトルを V, I とし、接続行列 A とする。このとき次式のいわゆるエネルギー保存則が成立する。

$$V^T I = (A^T V_n) I = V_n (A I) = 0 \quad (38)$$

これと対応する素子が異なっているが、接続情報が同じであって同じ接続行列 A をもつ \hat{N} において、素子の電圧電流ベクトルを \hat{V}, \hat{I} とする。このとき上式と同様に同じ接続行列 A をもつために次式が成立する。

$$V^T I = V^T \hat{I} = \hat{V}^T I = \hat{V}^T \hat{I} = 0 \quad (39)$$

これはテレゲンの定理と呼ばれる。

この定理の適用例を図 7 の 2 つの回路により説明する。左より回路 N, \hat{N} とする。これら回路は対応する素子が異なっているが、接続情報が同じであって同じ接続行列をもつ。各素子の電圧電流を計算して、 $V^T \hat{I}$ を計算すると 0 となっていることが確認できる。

$$V^T \hat{I} = 4 \times 1 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 + 2 \times (-2) = 0 \quad (40)$$

4.5 相反定理

電源を含まない図 8(a) の回路 N より 2 つの端子対 1-1', 2-2' を引き出す。その 1 方の端子 1-1' に電圧 V_1 を加え、他端 2-2' を短絡して流れる電流を I_2 とする。また図 8(b) に示すように逆方向より励起し回路 \hat{N} として、端子 2-2' に電圧 \hat{V}_2 を加え、1-1' を短絡して流れる電流を \hat{I}_1 とする。

$$V_1 \hat{I}_1 = \hat{V}_2 I_2 \quad (41)$$

$$\frac{V_1}{I_2} = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_1} \quad (42)$$

が成立し、2 つの端子間の伝達コンダクタンスが等しい。これは相反定理と呼ばれる。

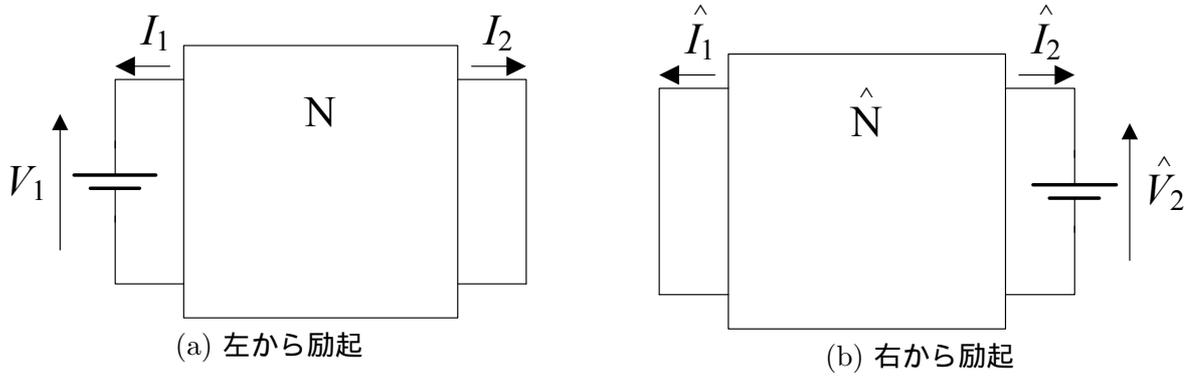


図 8: 相反定理

これは回路 N, \hat{N} 間にテレゲンの定理を適用することにより証明できる。引き出した端子も含めて回路の素子数を b とする。それら素子に番号を振り、それぞれの電圧電流を $V_k, I_k, \hat{V}_k, \hat{I}_k (k = 1, \dots, b)$ とする。

$$\begin{aligned}
 V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 + \sum_{k=3}^b V_k \hat{I}_k &= 0 \\
 \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \sum_{k=3}^b \hat{V}_k I_k &= 0
 \end{aligned} \tag{43}$$

回路内は同じ抵抗のみであるから $k = 3, \dots, b$ に対して

$$V_k \hat{I}_k = R_k I_k \hat{I}_k = (R_k \hat{I}_k) I_k = \hat{V}_k I_k \tag{44}$$

なるので、次式に帰着する。

$$V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 \tag{45}$$

さらに $V_2 = \hat{V}_1 = 0$ であるので、次の相反定理を得る。

$$V_1 \hat{I}_1 = \hat{V}_2 I_2 \tag{46}$$

$$\frac{V_1}{I_2} = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_1} \tag{47}$$

同様に 2 つの回路の励起の工夫により次式の関係も得られる。

$$-\frac{I_2}{I_1} = \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} \tag{48}$$