

コンピュータ応用解析（加藤）

1 実係数連立一次方程式の解法

連立一次 n 元方程式を解くサブルーチンを作成し、使用例を示せ。ただし、枢軸（ピボット）要素に零がこないように工夫せよ。

検討問題

- 1-1 枢軸（ピボット）要素の選択と計算精度の関連について考察せよ。
- 1-2 連立一次方程式を解く際、行列に零要素が多い（スパース）な場合、これを利用して、記憶容量の節約や計算を高速化することができるが、これについて述べよ。
- 1-3 共役勾配法について述べよ。
- 1-4 連立方程式の解法のうち直接法と反復法の比較をし、それぞれの長所および短所について述べよ。
- 1-5 連立一次方程式を解く際、悪条件と呼ばれる現象が見られることがあるが、これはどのようなときに生じるかについて述べ、その対策法を検討せよ。

2 正弦波（ひずみ波）交流回路の解析

正弦波交流回路の解析を複素記号法を利用して行う。この場合、回路現象の記述が複素数表現となる理由は、電気回路学で学んだように正弦波交流に対してはキャパシタンス・インダクタンスなどのエネルギー蓄積素子の性質が周波数領域では複素数の演算により表現されることによる。

時間領域

$$\begin{aligned} \text{キャパシタンス} \quad i(t) &= C \frac{d}{dt} v(t) \\ \text{インダクタンス} \quad v(t) &= L \frac{d}{dt} i(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

周波数領域

$$\begin{aligned} \text{キャパシタンス} \quad \bar{I}(\omega)\varepsilon^{j\omega t} &= j\omega C \bar{V}(\omega)\varepsilon^{j\omega t} & \bar{I}(\omega) &= j\omega C \bar{V}(\omega) \\ \text{インダクタンス} \quad \bar{V}(\omega)\varepsilon^{j\omega t} &= j\omega L \bar{I}(\omega)\varepsilon^{j\omega t} & \bar{V}(\omega) &= j\omega L \bar{I}(\omega) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ただし、 j は純虚数、 ε は自然対数、 $\omega = 2\pi f$ は周波数 f に対する角周波数

このことを前提に図 2-1(a) に示した正弦波入力 $e = A_{11} \sin \omega t$ を 1 段の LC 回路を通した出力電圧 v^2 を求めることを考える。上記性質より図 2-1(b)、キャパシタンスおよびインダクタンスのアドミタンス値がそれぞれ $j\omega C$, $\frac{1}{j\omega L}$ となるので、修正節点方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} & -1 \\ -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{j\omega L} + j\omega C + \frac{1}{R} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{V}^2 \\ \bar{I}^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{A}_{11} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

上式は単なる複素係数の連立一次方程式であるから、与えられたパラメータの下で各係数を求めて、一次方程式を解けば出力節点の電圧 \bar{V}^2 が求められる。

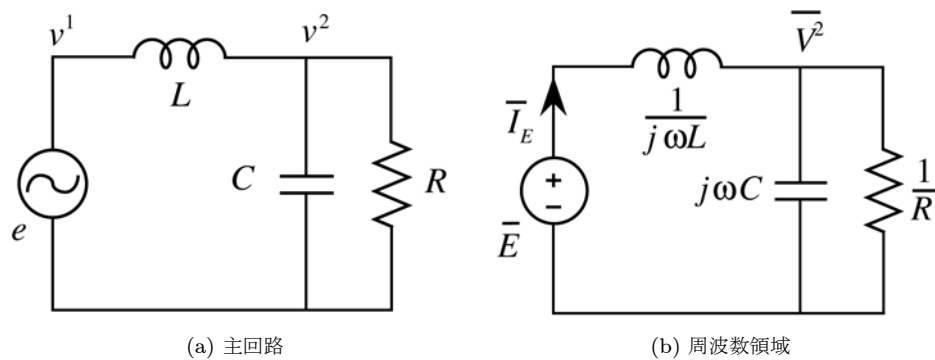


図 2-1: 1 段 LC フィルタ回路

検討問題

このとき回路が定常状態にあるとして以下の間に答えよ。

- 2-1** 入力電圧が $e = \sin \omega t$, $\omega = 2\pi f$, $f = 50$ のときの出力電力波形 V^2 を求め、両波形をグラフ表示せよ。
- 2-2** 入力電圧 $e = \sin \omega t$, $1 \leq f \leq 1000$ まで変化させたときの入出力伝達比 $\frac{V^2}{E}$ の振幅および位相をグラフ表示せよ。
- 2-3** さらに、ひずみ波交流 $e = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t$ に対して $f = 50$ のときの入出力電圧波形 e, v^2 を求め、グラフ表示せよ。
- 2-4** 2-1 および 2-3 における瞬時電力のグラフを求め、さらに力率値を求めよ。
- 2-5** 本プログラムもしくはそれを修正したものの応用性、利用性について論じよ。

3 非線形連立方程式の解法

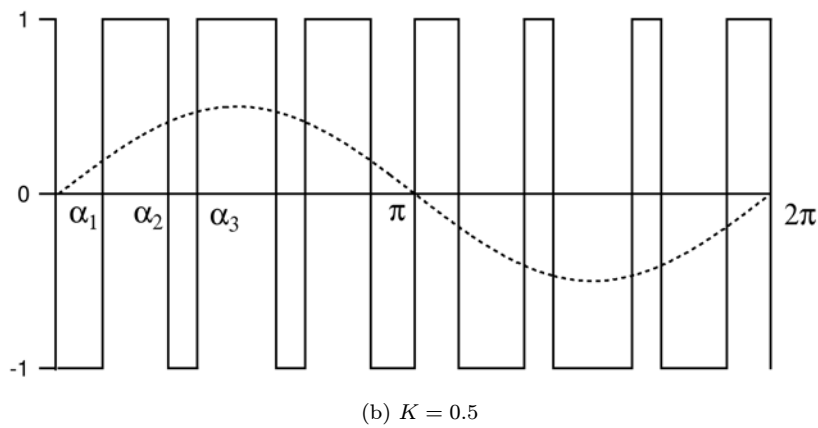
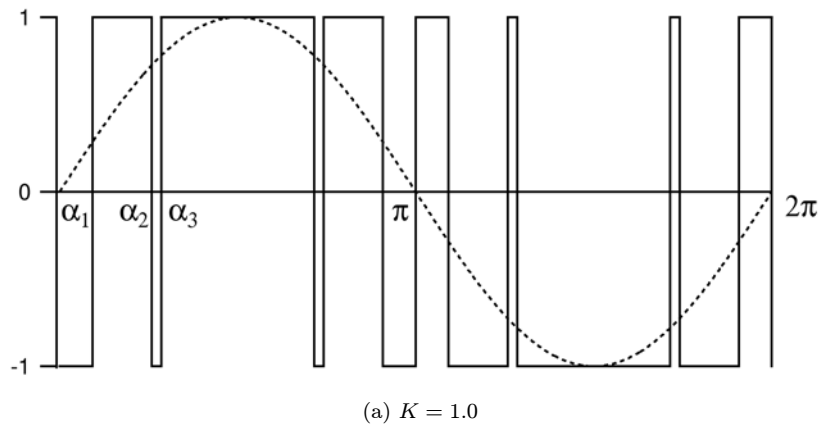


図 3-1: PWM 出力波形

図はパルス幅変調 (PWM) 波形であって、これはパルス幅の長短により疑似的な正弦波の振幅 K も制御することができる。ただし一周期を 2π 、また、振幅も図のごとく規格化されているものとする。例えば図 3-1(a) は広い幅のパルスを出した $K = 1.0$ の場合であり、図 3-1(b) は狭い幅のパルスを出して $K = 0.5$ とした場合である。さらにはそのパルス位置を適切に設定すれば高調波を低減してかなり正弦波に近い波形を出力することができる。本問題はこのような低ひずみのパルススイッチ角 (パルスパターン) の計算を行なうことを目的とする。一般に周期関数はフーリエ級数に展開でき、そのときの各係数が高調波振幅と呼ばれるものである。図のごとく PWM 出力波形に $1/2$ 周期対称性、 $1/4$ 周期反対称性があるものとするとならば出力中に奇数次の正弦波項のみが存在してその振幅 A_k は次式となる。

$$A_k = \frac{4}{k\pi} \{2 \cos(k\alpha_1) - 2 \cos(k\alpha_2) + 2 \cos(k\alpha_3) - 1\} \quad (3.1)$$

また、一般的に自由度 M の場合には次式で表される。

$$A_k = \frac{4}{k\pi} \left\{ 2 \sum_{i=1}^M (-1)^{i+1} \cos(k\alpha_i) - 1 \right\} \quad (3.2)$$

位相角 $\alpha_1 \sim \alpha_3$ の決定に対する 3 自由度の拘束条件として、基本波を値 K に指定し、また、出力波形を正弦波化する条件として 3 次および 5 次を消去することが考えられ、次式群となる。

$$\begin{aligned} A_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{4}{\pi} \{ 2 \cos(\alpha_1) - 2 \cos(\alpha_2) + 2 \cos(\alpha_3) - 1 \} = K \\ A_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{4}{3\pi} \{ 2 \cos(3\alpha_1) - 2 \cos(3\alpha_2) + 2 \cos(3\alpha_3) - 1 \} = 0 \\ A_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{4}{5\pi} \{ 2 \cos(5\alpha_1) - 2 \cos(5\alpha_2) + 2 \cos(5\alpha_3) - 1 \} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

これは 3 元の変数に関する非線形連立方程式であって、その解法にニュートン＝ラフソン法を用いる。真の解 $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ は未知数であるが、その近似解 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ が与えられているとき、これを中心としてテーラー展開すると

$$\begin{aligned} A_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) &= A_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}(\alpha_1^* - \alpha_1) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(\alpha_2^* - \alpha_2) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3}(\alpha_3^* - \alpha_3) + O^2 \\ A_3(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) &= A_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1}(\alpha_1^* - \alpha_1) + \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2}(\alpha_2^* - \alpha_2) + \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3}(\alpha_3^* - \alpha_3) + O^2 \\ A_5(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) &= A_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{\partial A_5}{\partial \alpha_1}(\alpha_1^* - \alpha_1) + \frac{\partial A_5}{\partial \alpha_2}(\alpha_2^* - \alpha_2) + \frac{\partial A_5}{\partial \alpha_3}(\alpha_3^* - \alpha_3) + O^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

ところが $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ は真の解であるから

$$\begin{aligned} A_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) &= K \\ A_3(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) &= 0 \\ A_5(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

であり、また二次微分以上の項 O^2 を無視すれば、行列による表現を用いて次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial A_5}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_5}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_5}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_1^* \\ \Delta \alpha_2^* \\ \Delta \alpha_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + K \\ -A_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ -A_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ただし $\Delta \alpha_i = \alpha_i^* - \alpha_i$ である。このとき、これをベクトル表示すると次式となる。

$$J \Delta \alpha = -f \quad (3.8)$$

(J :ヤコビアン行列、 $\Delta \alpha$:修正ベクトル、 f :エラーベクトル)

適当な初期値 $\alpha^{(0)}$ より、 J および f を求めて上式より $\Delta \alpha$ を求め

$$\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} + \Delta \alpha^{(n+1)} \quad (3.9)$$

によって新たな初期値を次々と決定するという過程をあるていど規範 ($\|\Delta \alpha^{(n+1)}\| \leq \varepsilon$) を満足するまで繰り返せばそれが解として得られる。ただし収束しなかったときには修正反復過程の無限ループが生じるため、これを避ける工夫が必要である。

以上のように、高調波を抑えるようなパルススイッチ角を計算することにより正弦波に近いパルス波形を求めることができる。

検討問題

- 3-1** 第 k 高調波 $A(k)$ が (3-2) で与えられることを証明せよ。
- 3-2** 計算されたパルス波形の高調波を第 15 次まで求めよ。
- 3-3** 反復回数と誤差の収束状況関係を図示して考察せよ。
- 3-4** 非線形方程式の多重解に対する工夫を述べよ。
- 3-5** ニュートン=ラフソン法の解への収束性について検討せよ。また収束性を高める方法を工夫せよ。
- 3-6** 他の非線形方程式の解法（例えば最急勾配法など）について調べよ。

4 線形回路の過渡解析

電気回路過渡現象解析を連立微分方程式を解くことにより行う。回路現象の記述が微分方程式となる理由はキャパシタンス・インダクタンスなどのエネルギー蓄積素子の性質が微分方程式により表現されることによる。すなわちキャパシタンス (C)、インダクタンス (L) において素子電流 $i(t)$ と素子電圧 $v(t)$ との関係は微分記号'を用いれば次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{キャパシタンス} \quad i(t) &= C v'(t) \\ \text{インダクタンス} \quad v(t) &= L i'(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

これを数値積分するためにステップ $t = t_n = (n-1)h$ における $x(t)$ の値として x_n として台形（トラペゾイダル）則を適用すれば次式となる。

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \{f(x_n) + f(x_{n+1})\} \quad (\dot{x} = f(x) \text{ のとき}) \quad (4.2)$$

従って、台形則で離散化したときのキャパシタンスおよびインダクタンスの回路は図 4-1 に示したように抵抗と電流源よりなる等価回路の解析に帰着する。ここにおいて $t = t_{n+1}$ において各素子の i_{n+1}, v_{n+1} を求めようとしたとき、 v_n, i_n は既知であるため電流源はある一定の値をとることに注意を要する。

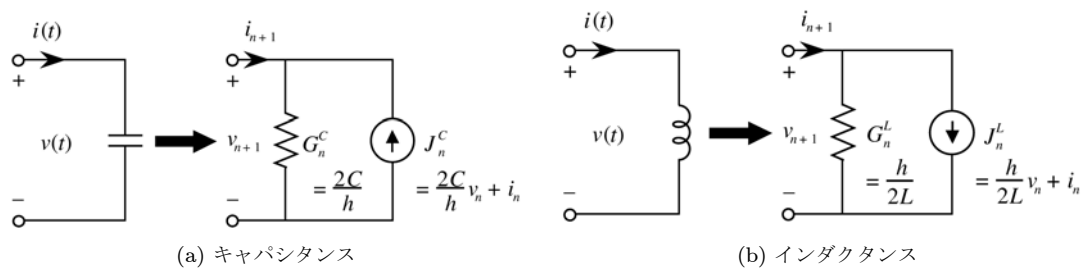


図 4-1: 台形（トラペゾイダル）則による離散化等価回路

以上の前提をもとに図 4-2(a) に示したような、電圧源を一段の LC フィルタでろ波した後に負荷抵抗 R が接続されている回路において負荷電圧波形を求めることを考える。まず LC 両素子を図 4-2(b) に示した等価回路に置き換えることができる。このときの節点 1、2 の電位を v^1, v^2 電圧源の電流を i^E として

$$\begin{bmatrix} G_n^L & -G_n^L & -1 \\ -G_n^L & G_n^L + G_n^C + \frac{1}{R} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n+1}^1 \\ v_{n+1}^2 \\ I_{n+1}^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_n^L \\ J_n^L + J_n^C \\ E \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

すなわち

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{J}_n \quad (4.4)$$

ただし

\mathbf{Y}_n : 修正節点アドミタンス行列

\mathbf{v}_{n+1} : 修正節点電圧ベクトル

\mathbf{J}_n : 修正電流ベクトル

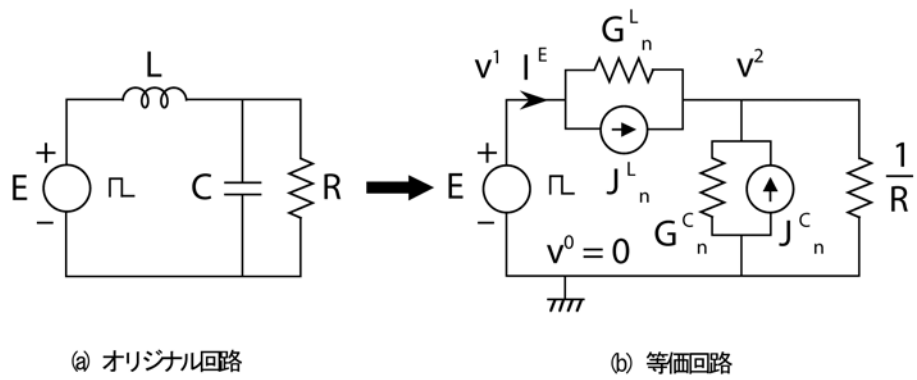
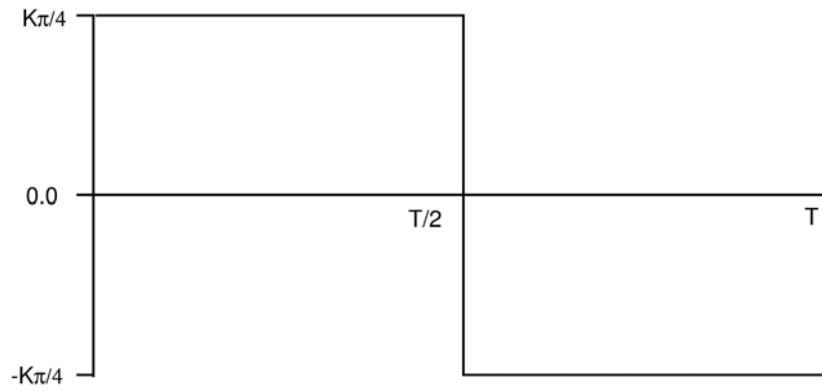
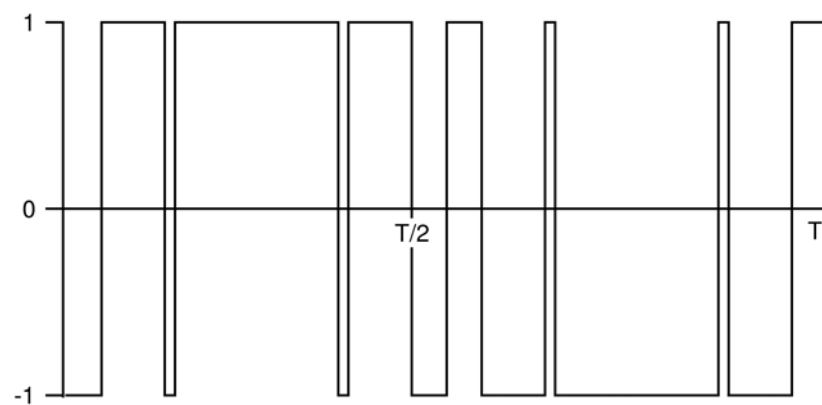


図 4-2: 1 段 LC フィルタのある負荷回路



(a) 短形波



(b) PWM 出力波形

図 4-3: 印加電圧波形

E の値は $t = t_{n+1}$ において確定し、それ以外の \mathbf{J}_n の成分および \mathbf{Y}_n の各要素の値は $t = t_n$ において既知であるから $t = t_{n+1}$ における v_{n+1} の値はこの連立方程式を解けばよい。さらに t_{n+1} の時の値をもとにして t_{n+2} の時の値を求め、このプロセスを繰り返せばよい。電圧源の値としてまず図の短形波および問題 2 で求めた図の PWM 波形を加えた場合のそれぞれの場合に対する抵抗負荷電圧波形すなわち節点 2 の電圧波形を求めよ。

検討問題

- 4-1 図 4-3 に示した 2 つ印加電圧に対する出力を比較する際に、短形波の振幅を $\frac{K\pi}{4}$ にとったが、そのようにする理由について考察せよ。
- 4-2 (4-1),(4-2) 式より 4-1 図を導出せよ。
- 4-3 台形則の伝搬誤差について検討せよ。
- 4-4 前進オイラー法、後退オイラー法、トラペゾイダル（台形）法の数値的安定性を検討せよ。
- 4-5 回路素子 LCR が非線形るとき、本方式をどのように変形すればよいか検討せよ。
- 4-6 スティフ（堅い）微分方程式の解法の困難について述べ、その対策法を述べよ。

5 線形時変回路の解析

図 5-1 に示したような、昇降圧型 (buck-boost) コンバータに負荷抵抗 R が接続されている回路において負荷電圧波形を求めることを考える。まず解析を理想化して簡単にするためスイッチおよびダイオードを含めて電圧源 e で表し、 LC 両素子を図 4-2 に示した離散化等価回路に置き換えればスイッチモードにより回路トポロジーが依存する抵抗回路を解くことに帰着する。このときの節点 1, 2, 3 の電位を v^1, v^2, v^3 、電圧源・スイッチ・ダイオードの電流を i^E, i^{SW}, i^D としして次式となる。

$$\left[\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 1 \\ & G^L & & -1 \\ \hline & G^C + \frac{1}{R} & & \\ 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & & & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ i^E \\ i^{SW} \\ i^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J^L \\ J^C \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{オン時}) \quad (5.1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & G^L & & -1 \\ \hline & G^C + \frac{1}{R} & & 1 \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ i^E \\ i^{SW} \\ i^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J^L \\ J^C \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{オフ時}) \quad (5.2)$$

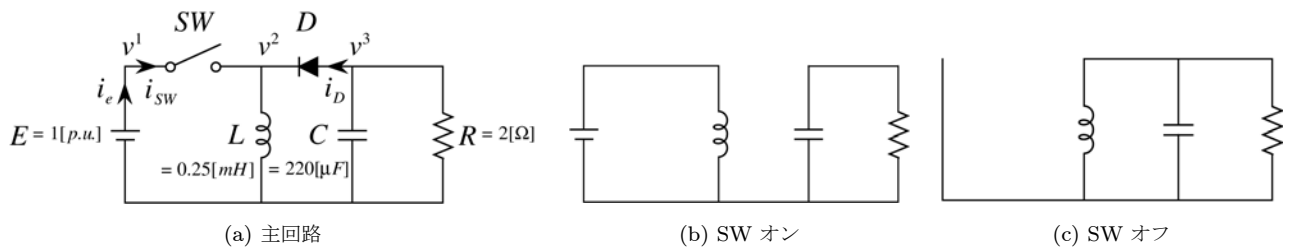


図 5-1: 昇降圧 (buck-boost) 型コンバータ回路

検討問題

- 5-1 (5.1) 式および (5.2) 式を導出せよ。
- 5-2 零初期値よりの過渡波形を求め、解析解と比較せよ。
- 5-3 出力電圧とデューティ比との関係を求めよ。
- 5-4 スイッチング周波数とリップル幅との関係を求めよ。
- 5-5 他のコンバータ回路 (例えば boost 等) の解析を行なうにはどのように変形すればよいか。

6 非線形回路の解析

5では線形時変回路を解いたが、本問題ではさらにその原理を発展させて、非線形回路を解くことを考える。両者は修正節点行列が一定でないという点においては類似しているが、前者においては同行列が時間パラメータのみに依存するのに対して後者においては同行列が回路変数パラメータのみに依存することによる。

解析対象として図 6-1 に示す降圧型コンバータ (buck) を取り上げる。この回路の修正節点方程式に基づく定式化による節点数は 6 であり、3つの付加素子電流変数 (i^E, i^{SW}, i^D) を加えて計 9 元の回路方程式となる。

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{節点 1} \quad -i^E + i^{SW} = 0 \\
 \text{節点 2} \quad G^L(v^2 - v^3) - i^{SW} - i^D = -J^L \\
 \text{節点 3} \quad -G^L(v^2 - v^3) + G^R v^3 = J^L \\
 \text{節点 4} \quad v^4 = V^{ref} \\
 \text{節点 5} \quad v^5 = v^4 - v^3 \\
 \text{節点 6} \quad v^6 = hys(v^5) \\
 \text{付加方程式 1} \quad v^1 = E \\
 \text{付加方程式 2} \quad i^{SW} = G^{SW} \delta^{SW} (v^1 - v^2) \\
 \text{付加方程式 3} \quad i^D = -G^D \delta^D v^2
 \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

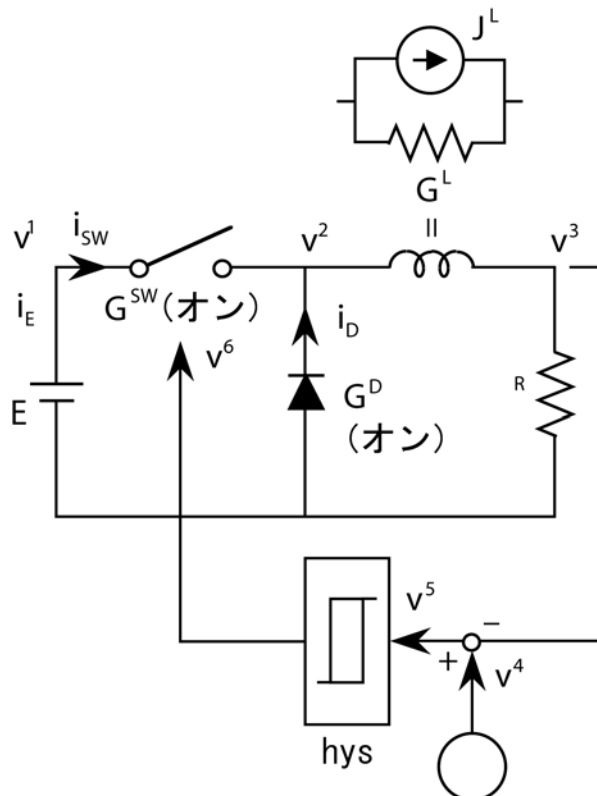


図 6-1: 降圧 (buck) 型コンバータ回路

以上を行列表現すれば次式のごとくなる。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & 1 & \\ & G^L & -G^L & & & \\ & -G^L & G^L + G^R & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \\ \hline & 1 & & & & \\ -G^{SW}\delta^{SW} & G^{SW}\delta^{SW} & & & & \\ & & G^D\delta^D & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \\ v^5 \\ v^6 \\ \hline i^E \\ i^{SW} \\ i^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J^L \\ J^L \\ V^{ref} \\ 0 \\ \hline E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

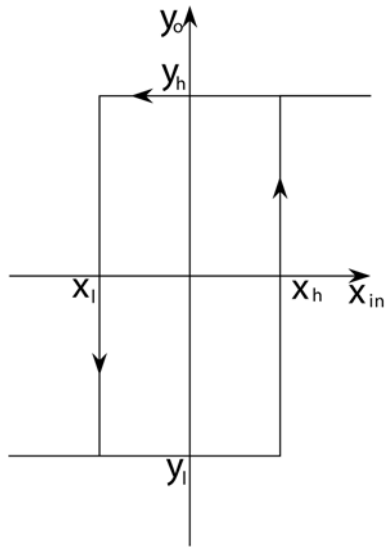
ただし、 G^{SW}, G^D はそれぞれスイッチおよびダイオードのオン時のアドミタンスである。また $\delta^{SW,D}$ は両スイッチ素子のスイッチ関数であり、スイッチのゲート信号もしくはダイオードの端子電圧が正なら 1 (オン) であり、そうでないなら 0 (オフ) となり、この値はヒステリシス関数をも含めて、各時間ステップのニュートン・ラフソン法における反復過程において収束決定される。ヒステリシス関数については下記関数を参照のこと。

```

// ヒステリシス関数の呼び方
hysteresis(&xin, &xh, &xl, &yh, &yl, &yo);

// ヒステリシス関数の例
void hysteresis(double *xin, double *xh, double *xl, double *yh, double *yl, double *yo)
{
    if(*yo <= *yl) {
        if(*xin > *xh) {
            *yo=*yh;
        }
        else{
            *yo=*yl;
        }
    }
    else{
        if(*xin < *xl) {
            *yo=*yl;
        }
        else{
            *yo=*yh;
        }
    }
}

```



検討問題

- 6-1 不連続モードの場合はどうなるか。
- 6-2 ダイオード・スイッチのオン抵抗の影響について述べよ。
- 6-3 出力電圧リップル幅とスイッチング周波数とを考慮したヒステリシス幅の設定法について述べよ。
- 6-4 スイッチ変化時におけるこの手法の欠点について述べ、その対策法を示せ。
- 6-5 他の微分方程式の数値解法よりこのような手法がこの応用例に関してどの点においてすぐれているか。

発展

問 1-3 におけるプログラムの汎用化もしくは一般化への方法について論じよ。